道路混雑のゲーム理論的考察；試論

On the Game Theory of Road Congestion；An Essay

中　野　　　宏

１．はじめに

標準的な非協力ゲーム理論では、合理的なプレイヤーが自らにとって最適な行動を選択することを想定する。しかしながら、現実問題として我々は常に合理的な理由にもとづき行動しているわけではない。道路混雑で言えば、一日限りのことであればともかく、人々が毎日同じような時刻に家を出て同じように渋滞に巻き込まれることを良しとし平気でいられるのはなぜであろうか。それは個々の合理的な選択の結果というより、同じような行動様式を持つ人々で社会が構成されている結果であると考えるほうがよほど合理的ではないか。

このような観点からゲームを解く新たな手法として、進化ゲーム理論がある。進化ゲームは、もともとは生物学においてダーウィン進化論の適者生存原理を説明するツールとして開発されたもので、現在ではおおもとの経済学においても人々の行動原理、特に制度やルールが形成される仕組みの解明に一役買っている。進化ゲーム理論にしたがえば、たとえば、わが国で自動車道路が左側通行としてルール化されているのは、それが進化的に安定な戦略（evolutionary stable strategy）だからである。戦略として左側通行と右側通行があるとき、人々の戦略が一致すれば通行は邪魔されず利得は高くなるが、一致しなければぶつかり合い利得は低い。このようなときには、左側通行の戦略をとる人と右側通行の戦略をとる人の増加スピード（賦存状況）の如何によって、どちらかの戦略が他の戦略の侵入を全く許さない状況、すなわち進化的に安定な戦略として、左側通行あるいは右側通行が社会のルールとして生き残ることになる。

本稿は、中野（2015）で展開した道路混雑モデルを再び用いて、ナッシュ均衡をもたらす戦略が進化的に安定か否かを検討する。

２．混雑モデルのナッシュ均衡

まず、中野（2015）の道路混雑モデルを再掲する[1)]。

同じ道路を利用し、同じ定刻までに目的地に達することを意図する個人Ａと個人Ｂの二人を考える。これらの個人には、

「早発」戦略：早い時刻に出発する

「遅発」戦略：遅い時間に出発する

という二つの戦略があるものとする。「早発」する個人は定刻よりも早くに到着することを意図して出発し、「遅発」する個人は定刻ちょうどに到着することを意図して出発する。

両人が異なる戦略を選べば混雑は生じないが、同じ戦略を選べば混雑が生じる。混雑が生じれば、渋滞もなく目的地に到達するときにかかる通常の移動費用のほかに、あらたに費用が発生するものとして、以下のような三つの追加的費用を仮定する。

① 混雑によって個人が負担する渋滞費用を q で所与とする。

② 「早発」の場合、混雑が生じなければ定刻よりも早く到着するが、このとき個人が負担する早着費用を a で所与とする。混雑が生じれば到着時間が遅れ定刻に到着するので早着費用はゼロになる。

③ 「遅発」の場合、混雑が生じなければ定刻に到着するが、混雑が生じれば到着時間が遅れ遅刻する。このとき個人が負担する遅刻費用を b で所与とする[2)]。

なお、渋滞費用は十分に大きく、$a<q$ 、$b<q$ が成立しているものとする。

「早発」「遅発」という二つの戦略を持つ個人が、同じ戦略を持つ他の個人と同じ道路上で出会う（あるいは出会わない）。すると下のような費用行列表が作成できる。ただし、数値は左側が個人Ａ、右側が個人Ｂの費用である。

		B	
		早発	遅発
A	早発	$(q,\ q)$	$(a,\ 0)$
	遅発	$(0,\ a)$	$(q+b,\ q+b)$

個人Ａ、個人Ｂが「早発」戦略を選ぶ確率をそれぞれ s （$0\leqq s\leqq 1$）、t （$0\leqq t\leqq 1$）、「遅発」戦略を選ぶ確率をそれぞれ $1-s$ 、$1-t$ として混合戦略を考えてみよう。個人Ａ、個人Ｂの期待費用は、それぞれ、

$$EC_A = s[tq+(1-t)a]+(1-s)(1-t)(q+b)$$

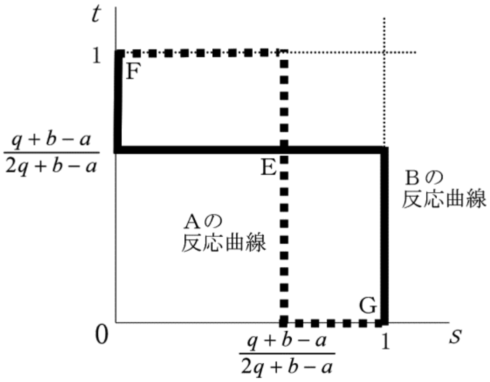
$$EC_B = t[sq+(1-s)a]+(1-t)(1-s)(q+b)$$

と表されるので、相手の確率を所与として自らの期待利得を最も大きくする（ここでは期待費用を最も小さくする）確率を選択する結果、両個人の反応曲線が下図のように描かれる[3)]。

したがって、

$$(s\ ,\ t)=(1\ ,\ 0)\ 、(0\ ,\ 1)\ 、\left(\frac{q+b-a}{2q+b-a}\ ,\ \frac{q+b-a}{2q+b-a}\right)$$

の三つの混合戦略ナッシュ均衡（Ｇ点、Ｆ点、Ｅ点）が存在することがわかる。



このうち、最初の二つは、両個人が互いに異なる戦略をとる場合、すなわち個人Ａが「早発」で個人Ｂが「遅発」、あるいは逆に個人Ａが「遅発」で個人Ｂが「早発」を選択する純粋戦略ナッシュ均衡と同値である。このときには混雑は生じず、さらには両者の費用の合計が最も小さくなる社会的に最適な資源配分が実現する。三つ目の混合戦略ナッシュ均衡は、各個人が確率 $\frac{q+b-a}{2q+b-a}$ でともに「早発」を選ぶか、あるいは確率 $1-\frac{q+b-a}{2q+b-a}=\frac{q}{2q+b-a}$ でともに「遅発」を選ぶ結果、混雑が生じることになる。

ところで、この三つ目の混合戦略ナッシュ均衡においては、期待費用は両者ともに、

$$EC_A=EC_B=\frac{q(q+b)}{2q+b-a}$$

となるが、これは a より大きく[4)]、たとえば個人Ａが s を０に近づけかつ個人Ｂが t を１に近づけるか、あるいはその逆を行うことによって、両者ともに期待費用を減少させることが可能となる。この意味において、この混合戦略ナッシュ均衡は最適な資源配分ではない。

３．進化的に安定な戦略

周知のとおり、ナッシュ均衡は、他のプレイヤーが戦略を変えてこない限り自らが利得を増やすことができない状態がすべてのプレイヤーに同時に実現しているという意味で均衡であるが、支配戦略均衡などの特殊な状況を除いて、必ずしもそこに至るメカニズムが確立されている均衡ではない。先に示した三つのナッシュ均衡にしても、たまたまその戦略を選べばナッシュ均衡が実現するにすぎない。しかし、毎日のように道路混雑が発生している現実を見れば、人々は混合戦略 $s=t=\frac{q+b-a}{2q+b-a}$ を採用していると考えるのが自然であろう。であれば、この均衡はどのような理由にもとづき

人々の合理性が行き着く先になったのであろうか。

このように考えると、社会の制度やルールも実はナッシュ均衡概念と同値であることに気付く。そのルールが存在するのは、他の人々がルールを守るかぎり自らもルールを守ることが利得を最も大きくするからであり、したがって、誰もそのルールから離脱する理由が生じないからである。少々乱暴な言い方をすれば、なぜそのルールが作られたのか、合理的な理由は必ずしもなくて構わない。結果が左側通行でも右側通行でもルールさえ統一されればどっちでもよかったはずである（実際、世界には両方とも存在する)。

進化ゲームでは、その都度合理的に戦略を選択する個人ではなく、何らかの理由で当初よりある行動規範を持ち、それにもとづき特定の戦略を有する個人を想定する。生物学的にはこの行動規範は遺伝的に、あるいは親が子に伝授することなどによって受け継がれる。道路混雑モデルでいえば、個人がどのような確率で「早発」あるいは「遅発」を選択するかは先天的に決まっているものと考えるのである。

ある戦略を持つ個人からなる社会が、いかなる他の戦略をもつ個人の侵入をも許さないとき、その戦略は進化的に安定であるという。先に示した三つのナッシュ均衡のうち、純粋戦略均衡と同値の最初の二つは、混雑は生じないもののすべてのプレイヤーが同じ戦略をとるナッシュ均衡ではないので、もとより進化的に安定な均衡にはなりえない。そこで、３つ目の各個人が確率 $\dfrac{q+b-a}{2q+b-a}$ でともに「早発」を選ぶ（あるいは確率 $\dfrac{q}{2q+b-a}$ でともに「遅発」を選ぶ）結果、混雑が生じる混合戦略ナッシュ均衡について考えてみよう。この戦略が進化的に安定であるならば、道路混雑が常態化する理由は、個人が状況に応じて合理的に行動する結果ではなく、一種の社会的なルールとしてその戦略が選択されることが合理的であるからである。

ここでは、難解な進化ゲーム理論を簡便的に要約した良書である佐々木(2003)の手法にしたがう[5)]。一例として、以下のような数値例の費用特性を持つ個人が多数存在する社会を考える。これは先の費用行列表で具体的に $q=4$ 、$a=1$ 、$b=3$ としたケースである。

		相手	
		早発	遅発
自分	早発	4	1
	遅発	0	7

この社会の個人は確率 $\dfrac{q+b-a}{2q+b-a}=0.6$ で「早発」を、確率 $\dfrac{q}{2q+b-a}=0.4$ で「遅発」を選択する混合戦略を先天的に有しているものとする。このとき、この社会において個人（既存者とよぼう）は100％の確率で同じ混合戦略を有する既存者の相手と

出会うことになるから、その期待費用は、

$$EC = 4\times0.6^2 + 0\times0.4\times0.6 + 1\times0.6\times0.4 + 7\times0.4^2 = 2.8$$

である。

ここで、この社会の既存者とは全く異なる d と $1-d$ の確率で「早発」と「遅発」を選ぶ個人（侵入者とよぼう）がこの社会に侵入し、その結果、社会の全人口のうち、m の割合が侵入者、$1-m$ の割合が既存者となったとしよう。すると、これはそのまま既存者がランダムに侵入者と既存者に出会う確率と考えてよいから、既存者が出会う相手が保有する戦略は、確率 $0.6(1-m)+dm$ で「早発」、確率 $0.4(1-m)+(1-d)m$ で「遅発」と予想されるであろう。したがって、その期待費用は、

$$\begin{aligned}EC' &= 4\times0.6\times[0.6(1-m)+dm] + 0\times0.4\times[0.6(1-m)+dm]\\ &\quad +1\times0.6\times[0.4(1-m)+(1-d)m] + 7\times0.4\times[0.4(1-m)+(1-d)m]\\ &= 2.8+0.6m-md\end{aligned}$$

と表される。一方、既存者と出会う侵入者の期待費用は

$$\begin{aligned}EC'' &= 4\times d\times[0.6(1-m)+dm] + 0\times(1-d)\times[0.6(1-m)+dm]\\ &\quad +1\times d\times[0.4(1-m)+(1-d)m] + 7\times(1-d)\times[0.4(1-m)+(1-d)m]\\ &= 2.8+4.2m-13md+10md^2\end{aligned}$$

と表される。

このような出会いが頻発する中で、既存者が生き残るためには（侵入者が淘汰させるためには)、

$$EC' < EC''$$

となっていなければならない。そこで、$EC''-EC'$ を計算してみると、

$$\begin{aligned}EC''-EC' &= 3.6m-12md+10md^2\\ &= 10m(d-0.6)^2 > 0\end{aligned}$$

となり、d がどんな値であっても、すなわち、いかなる他の戦略をもつ個人の侵入に対しても $EC' < EC''$ が必ず成立することがわかる。したがって、このナッシュ均衡における混合戦略は進化的に安定である。

上記の結果においては、戦略 d だけではなく、侵入者の割合 m もまた進化的に安定であることの条件と独立になっている。通常、ある戦略が他の戦略に対して進化的に安定となるかは、戦略 d の値とともに侵入者の割合 m の値にも依存する。直感的に理解できるように、侵入者の割合がある程度大きくなれば、逆に既存者のほうが淘汰される可能性もある。左側通行となったのは、単純に左側通行を行う人々が多かったために左側通行する利益が大きく（それを変えることの費用が大きく）なり、それがますます左側通行する人を増やすことでルールとして定着したからである。

このことは、上記の混合戦略がいわゆる対称ナッシュ均衡（すべてのプレイヤーが

同じ戦略をとるようなナッシュ均衡）であることと関わっている。進化的に安定な戦略は必ず対称ナッシュ均衡である。そこで、対称ナッシュ均衡の混合戦略Ｃが他のいかなる混合戦略Ｄに対しても進化的に安定か否かは、以下の条件が満たされるかどうかを調べればよいことが知られている[6)]。

$P_{CC} \geq P_{DC}$　かつ　$P_{CC} = P_{DC}$ ならば $P_{CD} > P_{DD}$

ただし、

戦略Ｃを持つ個人が同じ戦略Ｃを持つ個人と出会うときの期待利得を P_{CC}

戦略Ｃを持つ個人が戦略Ｄを持つ個人と出会うときの期待利得を P_{CD}

戦略Ｄを持つ個人が戦略Ｃを持つ個人と出会うときの期待利得を P_{DC}

戦略Ｄを持つ個人が同じ戦略Ｄを持つ個人と出会うときの期待利得を P_{DD}

上記の例で確認してみよう。まず、ナッシュ均衡の混合戦略Ｃ（確率 0.6 で「早発」、確率 0.4 で「遅発」）の有する既存者の個人が同じ戦略を持つ既存者の個人と出会うときの期待費用は先に計算したとおり、

$$EC_{CC} = 2.8$$

である。

次に「早発」と「遅発」を d と $1-d$ の確率（戦略Ｄ）で選ぶ個人がこの社会に侵入してきたとしよう。既存者の個人が侵入者の個人と出会うとき、その期待費用は、

$$\begin{aligned} EC_{CD} &= 4 \times 0.6 \times d + 0 \times 0.4 \times d + 1 \times 0.6 \times (1-d) + 7 \times 0.4 \times (1-d) \\ &= 3.4 - d \end{aligned}$$

逆にそのときの侵入者の個人の期待費用は

$$\begin{aligned} EC_{DC} &= 4 \times d \times 0.6 + 0 \times (1-d) \times 0.6 + 1 \times d \times 0.4 + 7 \times (1-d) \times 0.4 \\ &= 2.8 \end{aligned}$$

さらに、侵入者の個人どうしが出会ったときの期待費用は、

$$\begin{aligned} EC_{DD} &= 4 \times d^2 + 0 \times (1-d)d + 1 \times d(1-d) + 7(1-d)^2 \\ &= 10d^2 - 13d + 7 \end{aligned}$$

となる。

以上より、

$$EC_{DD} - EC_{CD} = 10d^2 - 13d + 7 - (3.4 - d) = 10\left(d - 0.6\right)^2$$

であるから、 $d \neq 0.6$ であるような任意の d について、

$$EC_{CC} = EC_{DC} \quad \text{かつ} \quad EC_{CD} < EC_{DD}$$

が成立するので、混合戦略Ｃは進化的に安定な均衡である。

4．おわりに

本稿でも触れた通り、進化ゲーム理論はもともと生物学の分野で進展したものであり、個体の行動規範を主に遺伝子情報に求める。佐々木（2003）が指摘しているように、利得が小さい（費用が大きい）侵入者が淘汰される理屈は、進化論的に、適応度の高い個体同士がより効率的に子孫を遺せるので種の存続に寄与することができるからと考えたほうがわかりやすい。

私事で恐縮だが、筆者は毎日乗用車で通勤している。が、確かに混合戦略に近い感覚を持っている。一週間の出発時間については、ほぼ特定の割合で早めに出発する日と遅めになる日が存在する。果たしてそれは遺伝によるものなのか、ふと親兄弟の行動に思いをはせたりもする。進化ゲームは、状況に応じてその都度異なる最適な行動をとることができる合理的なプレイヤーを想定することなく、均衡の安定性を説明できる点で評価されるが、なぜ自分は性懲りもなく毎日渋滞に巻き込まれるのか、特定の混合戦略を有している理由を経済合理的に明らかにしたいと思う。

＜参考文献＞

Weibull, Jörge W. (1995) *Evolutionary game theory*, MIT Press.（大和瀬達二監訳、三沢哲也ほか訳『進化ゲームの理論』文化書房博文社、1998年）

中野宏（2015）「道路混雑のゲーム理論的考察；再論」、研究年報第９号、大原大学院大学、pp. 73-83。

佐々木宏夫（2003）『入門ゲーム理論　戦略的思考の科学』、日本評論社。

---

1) 中野（2015）pp. 74-76。

2) 渋滞費用とは、渋滞によって生じる追加的なガソリン費用や、何もできない車中での時間が増えることによって失う時間価値等である。早着費用とは、早く出発することで失う自宅での時間価値と自宅ほど自由でなくとも定刻まで何かしらは出来る目的地での時間価値との差額等である。遅刻費用とは、始業時間に遅刻することで失う賃金価値や社会的信用の喪失等に相当する。

3) 所与の個人Ｂの戦略 t に対して、EC_A を最小にする個人Ａの最適反応は、

$$tq+(1-t)a-(1-t)(q+b)<0 \quad \therefore\ (0\leqq)\,t<\frac{q+b-a}{2q+b-a} \text{ のとき、} s=1$$

$$tq+(1-t)a-(1-t)(q+b)>0 \quad \therefore\ (1\geqq)\,t>\frac{q+b-a}{2q+b-a} \text{ のとき、} s=0$$

$$tq+(1-t)a-(1-t)(q+b)=0 \quad \therefore\ t=\frac{q+b-a}{2q+b-a} \text{ のとき、} 0\leqq s\leqq 1 \text{ の任意の値}$$

同様に、個人Ａの戦略 s に対して、EC_B を最小にする個人Ｂの最適反応は、

$$(0\leqq)\,s<\frac{q+b-a}{2q+b-a} \text{ のとき、} t=1$$

$$(1\geqq)\,s>\frac{q+b-a}{2q+b-a} \text{ のとき、} t=0$$

$$s=\frac{q+b-a}{2q+b-a} \text{ のとき、} 0\leqq t\leqq 1 \text{ の任意の値}$$

となるので、互いが互いの最適反応となっている戦略の組み合わせ（s，t）が文中のように求められる。

[4] 混合戦略ナッシュ均衡は、どの純粋戦略をとろうと期待利得（ここでは期待費用）が同じになるときに成立する。たとえば個人Ａが「早発」戦略をとるときの期待費用は $tq+(1-t)a$ であるが、「遅発」戦略をとる場合の期待費用もこれと等しくなるから、このとき、確率 s および $1-s$ によるその加重平均として、結局、$EC_A = tq+(1-t)a$ となる。したがって、$q \geqq EC_A \geqq a$ が成立する。

[5] 佐々木（2003）pp. 274-288。

[6] 定理の証明は、佐々木（2003）pp. 285-286を参照のこと。なお、戦略Ｃが相手の戦略Ｃに対する唯一の最適反応であるなら前半の条件のみでよい。上の脚注３）でわかるように本設例はそうではないので後半の条件が必要となる。

（なかの　ひろし・大原大学院大学　会計研究科教授）